Méthode des traces et trou spectral du laplacien

But : montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_g^{WP}\left(\lambda_1(X) \leq \frac{1}{4} - \varepsilon\right) \xrightarrow[g \to \infty]{} 0$$

$\left(\lambda_0(X) = 0, \ \lambda_1(X) > 0 \text{ car } X \text{ surface hyperbolique compacte} \right)$

<u>Formule des traces de Selberg</u> X surface hyp. compacte de genre g,

$$\Delta \varphi_j = -\lambda_j \varphi_j, \quad \lambda_j = \lambda_j(X) = \frac{1}{4} + r_j^2$$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \left(e^{itr_j} + e^{-itr_j} \right)}_{\text{terme spectral}} = \underbrace{(2g-2) \int_{\mathbb{R}} e^{itr} \, r \tanh(\pi r) \, dr}_{\text{terme topologique}}$$

$$+ \sum_{\underbrace{\gamma \in \mathcal{P}(X)}_{\substack{\text{géodésiques périodiques} \\ \text{orientées et primitives.}}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh\left(\frac{k\ell(\gamma)}{2}\right)} \delta_{t = k\ell(\gamma)}$$

Ex : pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ paire,

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \cos(t r_j)\, dt$$

$$= (2g-2) \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(r)\, r \tanh(\pi r)\, dr + \sum \sum \frac{\ell(\gamma)}{\sinh\left(\frac{k\ell(\gamma)}{2}\right)} \varphi(k\ell(\gamma))$$

Principe de la méthode des traces :

$$\lambda_j \geq \frac{1}{4} \iff r_j \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_j \leq \frac{1}{4} \iff r_j \in i\mathbb{R} \quad (\cos(t r_j) = \cosh(t|r_j|))$$

Pour φ à support dans $[-1,1]$, on pose $\varphi_L(t) = \varphi\left(\frac{t}{L}\right)$ à support dans $[-L,L]$ pour L grand.

Lemme : $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi = [-1,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Si $\lambda_1 \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 - \varepsilon$ $\quad (\iff r_1 \geq \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon})$

Alors

$$\forall L, \int \varphi_L(t) \cosh(t|r_1|)\, dt \geq C e^{(\alpha+\varepsilon)L} \qquad (*)$$

Donc pour montrer que $\lambda_1 > \frac{1}{4} - \alpha^2 - \varepsilon$, il suffit de trouver une fct test et un L qui contredisent $(*)$.

<u>Remarque</u> : cette stratégie apparaît dans un cas déterministe dans Booker-Strombergsson 2007, pour des surfaces arithmétiques $\Gamma_1(N) \backslash \mathbb{H}^2$ → ils ont montré que $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ pour $N \leq 287$ sans facteur carré.

Pour des surfaces aléatoires,

$$\mathbb{P}\left(\lambda_1(X) \leq \frac{1}{4} - \alpha^2 - \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\hat{\varphi}_L(r_1) \geq C e^{(\alpha+\varepsilon)L}\right)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[\hat{\varphi}_L(r_1)]}{C e^{(\alpha+\varepsilon)L}} \quad \text{(inég. de Markov)}$$

$$\left(\int \varphi_L(t) \cosh(t|r_1|)\, dt = 2\hat{\varphi}_L(r_1) \right)$$

Méthode des traces : $\varphi \geq 0$, $\hat{\varphi} \geq 0$

$$4\,\mathbb{E}[\hat{\varphi}_L(r_1)] \leq 4 \sum_j \mathbb{E}[\hat{\varphi}_L(r_j)]$$

$$\leq \underbrace{(2g-2)\int(\dots)}_{\substack{\text{objectif} \\ = O(e^{(\alpha+\varepsilon)L})}} + \mathbb{E}\left(\sum \sum \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(\dots)} \varphi_L(k\,\ell(\gamma))\right)$$

On doit prendre $L \geq \frac{\log g}{\alpha + \varepsilon}$.

Dans la suite, $L = A \log(g)$. Tous les termes $O(g)$ pourront être rassemblés.

__Lemme :__ $\mathbb{E}\left[\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} \sum_{k=2} \cdots \right] = O(gL^2)$

__Preuve :__ $\#\{\gamma \text{ fermées}, \ell(\gamma) \leq T\} \leq C_g e^L$

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh\left(\frac{k\ell(\gamma)}{2}\right)} \varphi_L(k\ell(\gamma)) \leq L \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(X) \\ \ell(\gamma) \leq L}} e^{-\ell(\gamma)} \|\varphi\|_\infty$$

$$\leq L(C_g L) \|\varphi\|_\infty . \quad \square$$

Pour la même raison,

$$\frac{1}{\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)} = e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \left(1 + O\left(e^{-\ell(\gamma)}\right)\right)$$

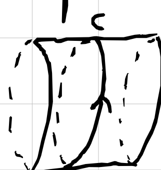
$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)} \varphi_L(\ell(\gamma)) = \sum \ell(\gamma) e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \varphi_L(\ell(\gamma)) + O(gL^2).$$

But: borne supérieure sur

$$\mathbb{E}_g\Big[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)} \underbrace{\frac{\ell(\gamma)}{\sinh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right)}}_{\text{ou } \ell(\gamma)e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}}} \varphi_L(\ell(\gamma))\Big]$$

$$= \mathbb{E}_g\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)} F_L(\ell(\gamma))\Big), \quad F_L(x) \doteq \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}\varphi_L(x)$$

Contribution des géodésiques simples

(type topologique local :  $= T$

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{\gamma \text{ simple}} F_L(\ell(\gamma))\Big) = \int_0^\infty F_L(\ell)\,\frac{V_g^T(\ell)}{V_g}\,d\ell$$

$$\underset{g\to\infty}{\sim} \int_0^\infty F_L(\ell)\,\frac{\ell\, V_{g-1,2}(\ell,\ell)}{V_g}\,d\ell$$

(Mirzakhani-Petri)

$$\sim \int_0^\infty F_L(\ell)\,\ell\left(\frac{\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right)}{\ell/2}\right)^2 d\ell$$

$$\sim 4\int_0^\infty \varphi_L(\ell)\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right) d\ell \sim Ce^{L/2}.$$

La valeur propre triviale $\lambda_0 = \frac{1}{4} + r_0^2$ donne $r_0 = \pm \frac{i}{2}$, et du côté spectral on a

$$2\int_{\mathbb{R}} \varphi_L(t) \cosh\left(\frac{t}{2}\right) dt \sim e^{\frac{L}{2}}$$

$\rightarrow$ comment se débarrasser des $e^{L/2}$ des deux côtés ?

Remarque (Wu-Xue, Lipnowski-Wright) :

$$4\int_0^\infty \varphi_L(\ell)\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) d\ell = 4\int_0^\infty \varphi_L(\ell)\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right) d\ell + O(1)$$

<u>Contribution des géodésiques non simples</u> (Wu-Xue)

$\rightarrow$ On veut mq cette contribution est en $O\left(\frac{e^{L/2}}{g}\right)$

<u>Rappel</u>: k fixé, $L = L(g)$,

$$\mathbb{P}(\underbrace{\exists \text{ une géod. périodique } \gamma,\ \ell(\gamma) \leq L,\ \text{t.q } |\chi(S(\gamma))| \geq k}_{B(k,L)}) = O\left(L^{3k}\frac{e^{2L}}{g^k}\right)$$

si $L = A\log g$ et $k \geq 4A+1$, alors $\mathbb{P}(B(k,\ell)) \xrightarrow[g\to\infty]{} 0$.

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(X)\\ \text{nonsimple}}} F_L(\ell(\gamma))\Big)$$

$$= \mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{1\leq|\chi(S(\gamma))|\leq 4A+1} F_L(\ell(\gamma))\Big)$$

$$+\, \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{\substack{\gamma\\ |\chi(S(\gamma))|>4A+1}} F_L(\ell(\gamma))\Big)\mathbb{1}_{B(k,\ell)}\Big)$$

La 2^e espérance est $\leq g e^{L}\|F\|_\infty \dfrac{L^{3k}e^{2L}}{g^k} \xrightarrow[g\to\infty]{} 0$

(car $L = A\log g$, $k = 4A+1$)

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{1\leq|\chi(S(\gamma))|\leq 4A+1} F_L(\ell(\gamma))\Big] = O\Big(L\, e^{\eta L}\,\frac{\|F_L(x)e^{x}\|_\infty}{g}\Big)$$

estimée de comptage améliorée de Wu–Xue, $\eta>0$ arbitrairement petit

⚠ Nb infini de types topologiques possibles

$$F_L(x) = \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \varphi_L(x)$$

donc $\quad \| F_L(x) e^{x} \|_\infty = O\left(e^{L/2}\right) \|\varphi\|_\infty$

En définitive,

$$\mathbb{E}\left[\hat{\varphi}_L(r_1)\right] \underbrace{\leq}_{\text{Wu-Xue}} O(gL^2) + O\left(L \frac{e^{L\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}}{g}\right)$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{objectif}} e^{(\alpha+\varepsilon)L} \quad (*)$$

Pour avoir $(*)$, on prend $e^{L/2} = g^2$, i.e. $L = 4 \log g$, $\eta \ll \varepsilon$, et $\alpha = \frac{1}{4}$.

<u>Théorème</u> (Wu-Xue, Lipnowski-Wright)

$\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\lambda_1 \leq \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}}_{3/16} - \varepsilon\Big) \xrightarrow[g \to \infty]{} 0.$$

Pour aller plus loin, il faut pousser les dvp asympt. à des ordres plus grands en $\frac{1}{g}$, être + précis dans la compréhension de la contribution des géodésiques non simples, et trouver une manière d'annuler les termes en $e^{L/2}$.

$$2\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_L(r_j) = (2g-2)\int \cdots + \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} \ell(\gamma)\, e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \varphi_L(\ell(\gamma))$$

$$+ O(g L^2)$$

Comment se débarrasser des termes en $e^{L/2}$?

Du côté spectral ils viennent de r_0. On va choisir φ tq $\hat{\varphi}(r_0) = 0$.

On fixe $M \geq 1$.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4} + r^2\right)\hat{\varphi}_L(r)}_{\geq 0} \longleftrightarrow \underbrace{\mathcal{D}^M \varphi_L}_{\text{⚠ pas de signe constant}}, \text{ où } \mathcal{D} = \frac{1}{4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

On a alors

$$2\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_L(r_j)\left(\frac{1}{4}+r_j^2\right)^m = (2g-2)\int \cdots$$
$$+ \sum_{\gamma} \ell(\gamma)\, e^{-\frac{\ell(\gamma)}{2}} \mathcal{D}^m \varphi_L(\ell(\gamma))$$
$$+ O(gL^2)$$

$$\to F_L(x) = \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \mathcal{D}^m \varphi_L(x).$$

Contribution des géodésiques simples :

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\gamma \text{ simple}} F_L(\ell(\gamma))\Big) \underset{g\to\infty}{\sim} 4\int \mathcal{D}^m \varphi_L(\ell) \sinh\left(\frac{\ell}{2}\right) d\ell$$

<u>NB :</u> $\mathcal{D}\left(\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right)\right) = 0$, donc par IpP on obtient

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\gamma \text{ simple}} F_L(\ell(\gamma))\Big) \underset{g\to\infty}{\sim} O(1)$$

Fixons T type topologique local, $T = (\mathcal{S}, c)$
où $\mathcal{S}$ est de genre $g_{\mathcal{S}}$ et a $n_{\mathcal{S}}$ comp. de bord

Rappel:

$$\mathbb{E}_g^{WP}\left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(X) \\ \gamma \sim T}} F_L(\ell(\gamma))\right) = \int_0^{\infty} F_L(x) \frac{V_g^T(x)}{V_g} dx$$

$$= \int \underbrace{\sum_{R \text{ réalisat}^{\circ}} \frac{V_R(\vec{x})}{V_g}}_{\text{dvp asymptotique à tout ordre.}} \int_{\mathcal{T}_{\vec{x}}(\mathcal{S})} F_L(\ell_Y(c)) \, d\mu^{WP}(Y) \prod x_i dx_i$$

$\vec{x} = (x_1, \dots x_m) > 0$

$$= \sum_{k=|\chi_{\mathcal{S}}|}^{K} \frac{1}{g^k} \underbrace{\int_0^{\infty} F_L(\ell) c_k^T(\ell) d\ell}_{\text{s'exprime en remplaçant}} + O\left(\frac{\|F(x)e^{x}\|_{\infty}}{g^{K+1}} e^{\eta L}\right)$$

pour $\eta > 0$ arbitraire

$$\sum_R \frac{V_R(\vec{x})}{V_g} = \sum_{k=|\chi_{\mathcal{S}}|}^{K} \frac{f_k(\vec{x})}{g^k} + O\left(\frac{e^{\sum \frac{x_i}{2}}}{g^{K+1}}\right)$$

terme dominant : vient de la réalisation non séparante $(k = |\chi_{\mathcal{S}}|)$.

$$f_{|\chi_{\mathcal{S}}|}(\vec{x}) = 2^{n_{\mathcal{S}}} \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{S}}} \sinh\left(\frac{\ell_i}{2}\right)$$

(Anantharaman–Monk 2022: forme analogue pour tout k).

Thm (Anantharaman-Monk)

$\forall T, k$, c_k^T est une fonction de Friedman-Ramanujan.

Déf: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction de Friedman-Ramanujan s'il existe un polynôme P et une fonction r t.q.

- $f(\ell) = P(\ell) e^{\ell} + r(\ell)$ $(*)$
- $r(\ell) = O(\ell^m e^{\ell/2})$ pour $m \in \mathbb{N}$ arbitraire.

(on suppose f continue).

Déf: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fct de Friedman-Ramanujan (au sens faible) si f localemt intégrable (plus nécessairement continue), si f vérifie $(*)$ et

$$\int_x^{x+1} r(\ell)\,d\ell = O\left(x^2 e^{x/2}\right)$$

(Origine de la terminologie : Friedman 2008 pour le trou spectral des graphes réguliers aléatoires.)

<u>Thm :</u> $c_k^T(\ell) = p_k^T(\ell) e^{\ell} + r_k^T(\ell)$

avec $\deg p_k^T \leq 2|\chi(S)| + 2k$, et toutes les constantes sont bornées uniformément en termes de k, g_S, n_S.

<u>Contribution du type topologique $T = (S, c)$</u>

$$\mathbb{E}_g^{WP}\Big(\sum_{\gamma \sim T} F_L(\ell(\gamma))\Big) =$$

$$\sum_{k=|\chi_S|}^{K} \frac{1}{g^k} \int_0^\infty F_L(\ell) c_k^T(\ell) d\ell + O\Big(\frac{\|F(x)e^{x}\|_\infty}{g^{k+1}} e^{\eta L}\Big)$$

où $F_L(x) = x e^{-\frac{x}{2}} \mathcal{D}^m \varphi_L(x)$

$$= \sum_{k=|\chi_S|}^{K} \frac{1}{g^k} \int_0^\infty \ell e^{-\ell/2} \mathcal{D}^m \varphi_L(\ell) \big(p_k^T(\ell) e^{\ell} + r_k^T(\ell)\big) d\ell$$

$$+ O\Big(\frac{e^{L(\frac{1}{2}+\eta)}}{g^{k+1}}\Big)$$

Pour $M \geq \deg p_k^T + 2$

$\geq 2k + 2|\chi(S)| + 2$

$$\int_0^\infty \ell e^{\ell/2} \mathcal{D}^M \varphi_L(\ell) p_k^T(\ell) \, d\ell = O(1)$$

(par Ipp, car $\mathcal{D}^M(P(\ell) e^{\ell/2}) = 0$ si $\deg P \leq M-1$)

$$\int_0^\infty e^{-\ell/2} \mathcal{D}^M \varphi_L(\ell) \, r_k^T(\ell) \, d\ell$$

$$= \sum_{n=0}^{L} \left(\int_n^{n+1} |r_k(\ell)| \, d\ell \right) n e^{-n/2} \, \| \mathcal{D}^M \varphi \|_\infty$$

$$= O\left(L^{c(k,S)}\right).$$

Donc, à T fixé,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\gamma \sim T} F_L(\ell(\gamma)) \right] = O(L^c) + O\left(\frac{e^{L(\frac{1}{2}+\eta)}}{g^{k+1}} \right)$$

Si on n'avait qu'un nb fini de types top. T à considérer, on pourrait conclure ainsi :

$$\mathbb{E}\left[(1+r_1^2)^n \hat{\varphi}_L(r_1)\right] \leq O(gL^2) + O\left(\frac{e^{L(\frac{1}{2}+\eta)}}{g^{k+1}}\right)$$

On prendrait alors $L = 2(k+2)\log g$

et $\alpha = \dfrac{1}{2(k+2)}$, et on aurait $\lambda_1 \geq \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4(k+2)^2} - \varepsilon$.